www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1989

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

COMMUNE AUX DEUX OPTIONS

DURÉE: 1 HEURE

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients complexes, I_p la matrice unité de $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ et $0_{p,q}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

I

Soient $(A,A') \in \left(\mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{C})\right)^2$, $(B,B') \in \left(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})\right)^2$, $(C,C') \in \left(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})\right)^2$, $(D,D') \in \left(\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})\right)^2$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$
(matrices écrites sous forme de blocs).

On rappelle que $MM' = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}$

A désigne dans tout le problème une matrice inversible.

1. a. On suppose que D est inversible.

Calculer $\begin{pmatrix} A & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A^{-1}BD^{-1} \\ 0_{n,m} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & D \end{pmatrix}$

et en déduire que pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n,m} & D \end{pmatrix}$ est inversible.

b. On suppose que $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n,m} & D \end{pmatrix}$ est inversible.

Calculer $\begin{pmatrix} A & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A^{-1}B \\ 0_{n,m} & D \end{pmatrix}$ et en déduire que D est inversible.

(On pourra considérer Y tel que $DY = 0$ et $X = -A^{-1}BY$).

2. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0_{n,m} & I_n \end{pmatrix}$ et en déduire que M est inversible si et seulement si $D-CA^{-1}B$ est inversible.

3. Si A' et D' sont inversibles, déterminer $\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0_{n,m} & D' \end{pmatrix}^{-1}$ sous la forme $\begin{pmatrix} X & Y \\ 0_{n,m} & Z \end{pmatrix}$, et calculer $\begin{pmatrix} A' & 0_{m,n} \\ C' & D' \end{pmatrix}^{-1}$.

(Il est possible d'utiliser les résultats du I.a. ou du I.b.).

4. Exprimer M en fonction de $\begin{pmatrix} A & 0_{m,n} \\ C & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} I_m & A^{-1}B \\ 0_{n,m} & I_n \end{pmatrix}$.

En déduire que si M^{-1} existe alors

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

II

Il est conseillé de traiter la question 1. avant la question 2.

Calculer A^{-1}, $A^{-1}B$, CA^{-1}, $(D-CA^{-1}B)^{-1}$; en déduire M^{-1} dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 492 & -808 \\ -287 & 472 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -65 & 75 \\ 38 & -44 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -53 & 87 \\ 45 & -74 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 492 & -808 & -65 & 75 \\ -287 & 472 & 38 & -44 \\ -53 & 87 & 7 & -8 \\ 45 & -74 & -6 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 8 & 7 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 9 & 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

$D = \begin{pmatrix} 1196 & 861 \\ 1347 & 1397 \end{pmatrix}$

ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX
ET DES TECHNIQUES SANITAIRES de STRASBOURG
Commune-Mathématiques appliquées

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail